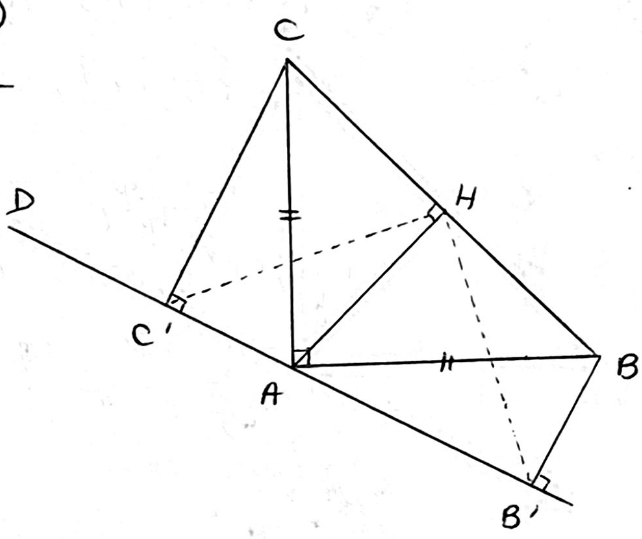
ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet A et H est le milieu de [BC]. Une droite D passant par A ne coupe pas le segment [BC]. On note B' et C' les projetés orthogonaux de B et C sur D.

1) Mq B'HC' est un triangle rectangle isocèle

2) Mq $B'C' = BB' + CC'$

(réf : Repère IREM n° 1 d'octobre 90, p 62, dans l'article " Résolution de problèmes en second cycle " de Noirfalise et Porte.)
(réutilisé dans [ccoc0001])



1) Vu les angles droits, les points

$$\begin{cases} A, C, C', H \text{ sont cocycliques} \\ B, B', A, H \text{ sont cocycliques} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'H}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CH}) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\ (\overrightarrow{B'H}, \overrightarrow{B'A}) = (\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$$

(en fait modulo π, mais on peut s'arranger puisque les ~~angl~~ mesures principals d'un triangle direct sont dans $[0, \pi]$, ...)

ce qui prouve que B'HC' est rectangle isocèle.

2) L'hypothèse " D ne coupe pas le segment [BC] " entraine " A appartient au segment [B'C'] " (cf lemme plus loin).

On constate, sur la figure, que les triangles AC'C et BB'A semblent isométriques. Il suffit de considérer la rotation r de centre H et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ pour obtenir :

$$\begin{cases} r(B) = A \\ r(B') = C' \\ r(A) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B'A = CC' \\ AC' = BB' \end{cases}$$

d'où $B'C' = B'A + AC' = CC' + BB'$ D

.../...

Lemme :

D ne coupe pas [BC] $\Rightarrow$ $A \in [B'C']$

preuve : Orientons le plan de sorte que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

$$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}) = (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) + \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) \quad (2\pi)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'})\right) + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CA})\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2} + (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC'})$$

$$= \frac{3\pi}{2} + (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}) - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$$

Par hypothèse, D ne coupe pas [BC], donc B et C sont du même côté de D et $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}) = 0 \quad (2\pi)$. Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$, on trouve :

$$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi \quad (2\pi)$$

□